**Bab 8**

**Pemetaan Linier**

Dalam Bab Ini:

* ***Pemetaan; fungsi***
* ***Pemetaan linear***
* ***Karnel dan bayangan dari pemetaan linear***
* ***Operasi-operasi dengan pemetaan linear***
* ***Pemetaan linear dan matriks linear***
* ***Perubahan basis***
* ***Matriks dan pemetaan linear umum***

**Pemetaan; Fungsi**

Topik utama aljabar linear adalah pengkajian mengenai pemetaan linear , berikut representasinya dengan menggunakan matriks. Bab ini akan memperkenalkan pemetaan linear ini dan menunjukan bagaimana pemetaan linear tersebut dapat dipresentasikan oleh matriks. Meskipun demikian, terlebih dahulu marilah kita mulai dengan mempelajari pemetaan ini secara umum.

Misalkan A dan B adalah sebarang himpunan takkosong. Anggaplah tiap elemen pada A dihubungkan dengan sebuah elemen unik dari *B* ; kumpulan *f* yang terdiri dari hubungan-hubungan seperti ini disebut *pemetaan* (atau peta) dari A ke B, dan dinotasikan dengan *f* : A🡪B. himpunan A disebut domainpemetaan tersebut, dan B disebut himpunan target. Kita menulis *f* (*a*), dibaca “*f dari a*” , untuk elemen dari B di mana *f* dihubungkan dengan *a € A.*

Kita juga dapat memandang pemetaan ƒ:AB sebagai sebuah mesin hitung,di mana untuk tiap nilai input A, akan menghasilkan sebuah nilai output yang unik ƒ B, Istilah fungsi dapat digunakan secara sinonim dengan kata pemetaan, meskipun beberapa buku mempertahankan kata “fungsi” untuk pemetaan bernilai real.

Perhatikan pemetaan *ƒ:* A→B. jika A’ adalah sebarang sub himpunan dari A, maka ƒ(A’) menotasikan himpunan bayangan elemen-elemen A’; dan jika B’ adalah sebarang sub himpunan dari B , maka (B’) menotasikan himpunan elemen-elemen A, dimana tiap bayangan terletak di *B*. Dalam hal ini , = {*f*  dan (B’) = {*a A:f(a) B’}. Kita menyebut f (A’)* sebagai bayangan dari A’ dan (B’) sebagai bayangan invers atau disebut prabayangan dari B’. secara khusus, himpunan seluruh bayangan yaitu *f* *(A)*,disebut bayangan atau range dari *f.*

Pada tiap pemetaan *f:* A terdapat subhimpunan dari *A X B* yang dinyatakan dengan {(*a,f(a)):a*  A}. kita menyebut himpunan ini sebagai grafik dari f.dua pemetaan f: A→B dan g:A→B dikatakan sama,ditulis *f*  = g jika f(*a*)=g (*a*) untuk setiap *a*  A,yaitu, jika kedua pemetaan ini mempunyai grafik yang sama.sehingga, kita tidak dapat membedakan antara fungsi dan grafiknya. Penyangkalan dari *f* = g ditulis *f* g dan dinyatakan dengan

Terdapat sebuah *a*  A di mana *f* (*a*) g (*a*)

Kadang-kadang tanda panah yang diberi garis tegak bagian belakangnya , digunakan untuk menotasikan bayangan dari sebarang elemen *a*  A dalam pemetaan *f* : AB dengan menuliskannya dalam bentuk *x f* (*x*). cara ini diilustrasikan pada contoh berikut ini

**Contoh 8.1.**

1. Misalkan *f*  :**RR** adalah fungsi yang menghubungkan tiap bilangan real *x* dengan kuadratnya, . Kita dapat menotasikan fungsi ini dengan menulis *f (x)=* atau *x* . Disini,bayangan dari -3 adalah 9, sehingga kita dapat menuliskannya dengan *f (-3 )* = 9. Meskipun demikian , (9) = {-3,3}. Demikian pula , *f* (**R**) = {0,) = { *x:x 0*} adalah bayangan dari *f.*
2. Misalkan A = {a,b,c,d} dan B {x.y.z,t}. maka persamaan fungsi berikut ini mendefinisikan pemetaan *f :AB:*

*f (a)* = y,*f (b) = x,y (c) = z,f (d)* = y atau *f*  ={(*a,y) ,(b,x) , (c,z) , (d,y)}* contoh pertama mendefinisikan pemetaan secara eksplisit,sedangkan contoh kedua mendefinisikan pemetaan berdasarkan grafiknya. Di sini,

*f({a,b,c}) = {f (a) ,f (b), f (d) = {y,x,y} = {x,y}* dengan demikian, *f (A) = {x,y,z}* adalah bayangan dar *f.*

**Contoh 8.2.** misalkan V adalah ruang vector yang terdiri dari polinominal-polinominal pada **R**, dan misalkan pula *p(t) =*

1. Turunannya mendefinisikan pemetaan **D** : V V dimana, untuk sebarang polinominal *f(t),* kita mempunyai **D***(f)* = *dfldt.* Sehingga

**D** (*p) =* ***D***(

1. Integralnya,katakanlah dari 0 sampai 1,mendefinisikan pemetaan **J** : V R. dalam hal ini, untuk sebarang polinominal *f(t),*

J (*f)* = *f (t) dt,* sehingga J (p) = =

Amati bahwa pemetaan di (b) adalah pemetaan dari ruang vector V ke medan skala **R**, sementara pemetaan di (*a*) adalah pemetaan dari ruang vector V k eke ruang vector V itu sendiri.

Misalkan A adalah sebarang matriks *m* x *n* pada K. maka A menentukan pemetaan : berdasarkan (u) = Au dimana vector-vektor pada dituliskan sebagai kolom. Sebagai contoh, anggaplah

A dan u =

Maka

(u) = Au = =

Untuk mempermudah penulisan notasi, kita akan sering menotasikan pemetaan dengan huruf A, yaitu symbol yang sama yang digunakan untuk menotasikan matriks.

Perhatikan dua pemetaan f: A B dan g: B C,seperti diilustrasikanb dibawah ini:

A f B g C

Komposisi dari  *f* dan *g* yang dinotasikan dengan *g f* , adalah pemetaan *g f*: A C yang didefinisikan dengan (*g* )(*a*) = *g*(*f* (*a*)). Dalam hal ini, pertama-tama kita menerapkan *f* ke dalam *a* *A* untuk memperoleh output *f* (*a*) *B* dengan menggunakan *f*, dan kemudian kita memasukkan input *f* (*a*) untuk memperoleh output *g*(*f* (*a*)) *C* dengan menggunakan *g.*

Teorama berikut ini menjelaskan bahwa komposisi dari pemetaan-pemetaan akan memenuhi hokum asosiatif.

**Teorema 8.1**: Misalkan *f* : *A B*, *g*: *B C* , *h*: *C D.* Maka

*h* (*g f*) = ( *h g*) *f*

Berikut ini kita akan membuktikan teorema di atas. Misalkan *a A.* Maka

(*h* (*g f*))(*a*) = *h*(( *g f*)(*a*)))

((*h g*) *f*)(*a*) = (*h g* )*f* (*a*)) = *h*(*g*(*f*(*a*)))

Sehingga (*h* (*g f*)) (*a*) = ((*h g*) *f*)(*a*) untuk setiap *a A*, sehingga

*h* (*g f*) = (*h g*) *f.*

Pemetaan *f* : *A* *B* dikatakan pemetaan *satu-ke-satu* (atau 1-1 atau *injektif*) jika tiap elemen yang berbeda dari *A* menghasilkan bayangan yang berbeda pula, yaitu:

1. Jika *a a’* , maka *f*(*a*) (*f*(*a’*))

Atau secara ekuivalen

1. Jika *f*(*a*) = *f*(*a’*), maka *a* = *a’.*

Pemetaan *f* : *A B* dikatakan pemetaan *atas* (atau *f* memetakan *A* atas *B* atau *surjektif*) jika setiap *b B* merupakan bayangan dan setidaknya satu *a A.*

Pemetaan *f*: *A B* dikatakan *korespondensi satu-ke-satu* antara *A* dan *B* (atau *bijektif*) jika *f* merupakan pemetaan satu-ke-satu maupun pemetaan atas.

**Contoh 8.3.** Misalkan *f*: **R R**, *g*: **R R, didefinisikan**

*f*(*x*) = , *g*(*x*) = *x3* –­ *x*

Fungsi *f*  di atas merupakan pemetaan satu-ke-satu karena 2*d* =2*b* mengimplikasikan *a* = *b* tetapi *f*  bukan pemetaan atas karena, sebagai contoh, -2 tidak mempunyai prabayangan. Fungsi *g* merupakan pemetaan atas, tetapi bukan pemetaan satu-ke-satu karena *g*(0) = *g*(1) = 0.

Misalkan *A* adalah sebarang himpunan takkosong. Pemetaan *f*: *A A* yang didefinisikan oleh *f* (*a*) = *a*, yaitu fungsi yang menghubungkan tiap elemen di *A* dengan dirinya sendiri, disebut *pemetaan identitas.* Pemetaan ini biasanya dinotasikan dengan **1**A atau **1** atau *I.* Perlu ditekankan bahwa *f* mempunyai invers jika dan hanya jika *f* merupakan korespondensi satu-ke-satu antara *A* dan *B*, yaitu, *f*  merupakan pemataan satu-ke-satu dan pemetaan atas. Demikian pula, jika *b B*, maka *f—1*(*b*) = *a*, di mana *a* adalah elemen unik dari *A* di mana *f* (*a*) = *b*.

Pemetaan Linear

Misalkan *V* dan *U* adalah dua ruang vektor pada medan *K* yang sama. Pemetaan *F*: *V U* disebut *pemetaan linear* atau *transformasi linear* jika memenuhi dua syarat berikut:

1. Untuk sebarang vektor *v, w V, F*(*v + w*) = *F*(*v*) + *F*(*w*).
2. Untuk sebarang scalar *k* dan vektor *v V, F*(*kv*) = *kF*(*v*).

Dalam hal ini, *F*: *V U* adalah linear jika pemetaan ini “mempertahankan” dua operasi dasar dari ruang vektor, yaitu operasi penjumlahan vektor dan operasi perkalian skalar.

Dengan menstubtitusikan *k* = 0 ke dalam syarat (2) di atas, kita memperoleh *F*(0) = 0. Sehingga, setiap pemetaan linear akan mengambil vektor nol ke dalam vektor nol.

Selanjutnya, untuk sebarang skalar *a*, *b K* dan sebarang vektor *v*, *w V*, kita memperoleh

*F*(*av* + *bw*) = *F*(*av*) + *F*(*bw*) = *aF*(*v*) + *bF*(*w*)

Dalam uraian yang lebih umum, untuk sebarang skalar *ai K* dan sebarang vektor *vi V*, kita memperoleh sifat dasar pemetaan linear berikut:

*F*(*a*1*v*1 + *a*2*v*2 + … + *amvm*) = *a1 F*(*v1*) + *a2 F*(*v2*) + … + *am F*(*vm*)

Pemetaan linear *F*(*av* + *bw*) = *aF*(*v*) + *bF*(*w*), sehingga syarat ini kadang-kadang digunakan sebagai definisinya.

Istilah *transformasi linear* lebih sering digunakan dibandingkan pemetaan linear untuk pemetaan linear yang berbentuk *F*: **R**n **R**m.

**Contoh 8.4.**

1. Misalkan *F:***R**3**R**3adalah pemetaan “proyeksi” ke bidang *xy*, yaitu, *F* adalah pemetaan yang didefinisikan oleh *F*(*x*, *y*, *z*) = (*x*, *y*, 0). Kita dapat menunjukkan bahwa *F* linear. Misalkan *v* = (*a*, *b*, *c*) dan *w* = (*a’*, *b’*, *c’*). Maka

F(v + w)x = f(a+a’,b+b’,c+c’) =(a+a’, b+b’,0)

=(a,b,0) + (a’,b’,0) = F(v) + F(w)

Dan, untuk sebarang scalar *k,*

F((ka,kb,kc) = (ka,kb,0) = kF(v)

Sehingga *f* linear.

(**b**) misalakan G adalah pemetaan “translasi” yang di defisinikan oleh *G*(x, y) = (x + 1, y+2). [yaitu, G menjumlahkan vector (1,2) dengan sebarang vector v=(x,y) pada .] perhatikan bahwa G(0) = ***G***(0,0) = (1,2) 0. Sehinnga, vector nol tidak di petakan ke vector nol tersebut. Oleh karna itu, *G* tidak linear.

**Contoh 8.5**. perhatikan ruang vector *V*=**P**(*t*) yang terdiri dari polinominal- polinominal pada medan real **R**. misalakan **U**(*t*) dan V(*t*) adalah sebarang polinominal pada V dan misalkan k adalah sebarang saklar.

1. Misalkan D: V V adalah pemetaan turunan. Kita dapat membuktikan dengan menggunakan kalkulus bahwa

= + dan =

Dalam hal ini , D(u + v) = D(u) + D(v) dan D(ku) = kD(u). dengan demikian, pemetaan turunan tersebut linear.

1. Misalkan J: Vadalah pemetaan integral, katakanlah J(f(t)) = . Kita juga dapat membuktikan dengan menggunakan kalkulus bahwa,

+

Dan

Dalam hal ini, J(u+v) = J(u) + J(v) dan J(ku). Dengan demikian, pemetaan integral tersebut liner.

**Contoh 8.6.**

1. Misalkan F:V**da**lah pemetaan yang menghubunkan vector nol 0 U ke setiap vector v V. maka, untuk sebarang vector v, w V dan sebarang scalar k K, kita mempunyai F(v+w) = 0 = +0 = F(v)+F(w) dan F(kv) = 0= k0= kF(v)

Sehingga F linear. Kita menyebut F sebagai pemetaan nol, dan biasanya akan di konotasikan dengan 0.

1. Perhatikan pemetaan identitas I: VV, yang mematakan tiap v V ke dirinya sendiri. Maka, untuk sembaran vector v, w V dan sebarang saklar a,b , kita mempunyai I(av +bw) = av + bw = al(v) + bl(bw). Dengan demikian, I linear.

Torema berikut menyajikan sekumpulan contoh pemetaan linear. Scara khusus , teorema ini menjelaskan bahwa sebuah pemetaan linear dapat ditentukan sepenuhnya berdasarkan nilai-nilainya pada elemen sebuah basis.

**Teorma 8.2** : misalkan V dan U adalah ruang vector pada medan K. Misalkan pula {, } adalah basis dari V dan adalah sebarang vector pada U. Maka terdapat perbedaan linear unik F : V sedemikian rupa sehingga

, F() = , F() =

Perlu di tekanknan bahwa vector pada teorma 8.2 benar-benar bernilai sebarang; dalam pengertian bahwa vector-vektor tsb bias tak bebas linier atau bahkan bias sama antara satu dengan yang lain nya.

Misalkan A adlh sebarang matriks real *m n* . ingat kembali bahwa A menetukan pemetaan : berdasarkan (u) = Au (dimana vector-vektor pada dan ditulis sbg kolom). Kita dapat menunjukan bahwa linaer. Berdasarkan perkalian matriks,

(v + w) = A (v+w) = Av + Aw = (v) + (w)

(kv) = A(kv) = k(Av) =

Dengan kata lain, dengan menggunakan kata A untk mempresentasikan pemetaan, akan di peroleh

A (v+w) = Av+Aw

A(kv) = k(Av)

Sehinnga, pemetaan matriks A adalah linear.

Dua ruang vector V & U pada K adalah isomorfik, ditulis V U, jika terdapat pemetaan linear bijektif ( pemetaan satu- ke- satu) atau pemetaan atas) F : V . Maka , pemetaan F dst sbg isomorfisme anatara V dan U.

Perhatikan sebarang ruang vector V berdimensi n dan misalkan S adlh sebarang basis dari V. maka pemetaan v yang memetakan tiap vector v V ke vector koordinat nya isomorfisme antara V dan .

Bayangan (image) (atau range) dari , ditulis , adalah himpunan titik-titk bayangan pada; yaitu

**Teorema 8.3:** Misalkan adalah pemetaan linear. Maka kernel dari adalah subruang dari dan bayangan dari adalah subruang dari .

Selanjutnya, anggaplah , , …, merentang ruang vektor dan anggaplah linear. Kita dapat menunjukkan bahwa ), …, ) merentang Im Misalkan Im maka terdapat sedemikian rupa sehingga . Karena merentang dan karena terdapat skalar , , …, dimana Dengan demikian,

Sehingga, vector merentang Im

Kita dapat menyatakan hasil diatas secara formal sebagai berikut.

**Proposisi 8.4**: Anggaplah merentang ruang vector dan anggaplah linear. Maka merentang Im

**Contoh 8.7.** Misalkan adalah proyeksi vector pada bidang ; yaitu jelaslah bahwa bayangan dari adalah seluruh bidang , yaitu titik-titik berbentuk Disamping itu, kernel dari adalah sumbu , yaitu titik-titik berbentuk yaitu,

Im bidang

dan

Ker sumbu .

Contoh 8.8. Perhatikan ruang vector V=P(t) yang terdiri dari polynomial – polynomial pada medan real R, dan misalkan H: V V adalah operator turunan ketiga,yaitu H [f(t)] = f / .[Kadang – kadang notasi digunakan untuk H, dimana D adalah operator turunan.] Kita dapat memastikan bahwa Ker H = {polynomial berderajat ≤ 2}=(t) dan Im H = V.

Hasil pertama diperoleh berdasarkan fakta bahwa H (at2 + bt + c) = 0 tetapi H(tn) ≠ 0 untuk n ≥ 3. Sedangkan hasil kedua diperoleh berdasarkan fakta bahwa setiap polinomial g(t) pada V adalah turunan ketiga dari polinomial f (t) (yang dapat diperoleh dengan mengambil antiturunan dari g(t) sebanyak tiga kali).

Perhatikan, misalnya, matriks A, 3 x 4 dan basis biasa {e1, e2, e3, e4} dari K4 yang ditulis sebagai kolom :

A =

e1 = e2 = e3 = e4 =

Ingat kembali bahwa A dapat dipandang sebagai pemetaan linear A: K4 K3, di mana vektor-vektor pada K4 dan K3 dapat dipandang sebagai vektor-vektor kolom. Selanjutnya, vektor basis biasa merentang K4, sehingga bayangan­bayangannya yaitu Ae1, Ae2, Ae3, Ae4 merentang bayangan dari A. Namun demikian, vektor Ae1, Ae2, Ae3, Ae4tepatnya merupakan kolom-kolom dari A:

Ae1 = [a1, b1, c1]T, Ae2 = [a2, b2, c2]T

Ae3 = [a3, b3, c3]T, Ae4 = [a4, b4, c4]T

Sehingga, bayangan dari A tepatnya merupakan ruang kolom dari A.

Di pihak lain, kernel dari A terdiri dari seluruh vektor v di mana Av = 0. Ini berarti bahwa kernel dari A merupakan ruang solusi dari sistem homogen AX = 0, yang disebut ruang nuldari A.

Kita dapat menyatakan hasil-hasil di atas secara formal sebagai berikut.

**Proposisi 8.5:** Nfisalkan A adalah sebarang matriks m x n pada medan K yang dapat dipandang sebagai pemetaan linear A : Kn 🡪 Km**.** Maka Ker A = ruang nul(A) dan Im A = ruang kolom(A). Di sini ruangkolom(A) menotasikan ruang kolom dari A, dan ruangnul(A) menotasikan ruang nul dari A.

Misalkan F: V 🡪 U adalah pemetaan linear. Rank dari F didefinisikan sebagai dimensi dari bayangannya, dan nulitas dari F didefinisikan sebagai dimensi dari kernelnya; dalam hal ini,

rank(F) = dim(Im F) dan nulitas(F) = dim(Ker F).

**Teorema 8.6:** Misalkan V berdimensi berhingga, dan misalkan F: V 🡪 U linear. Maka dimV = dim(ker F) + dim(Im F) = nulitas(F) + rank(F).

Ingat kembali bahwa rank dari matriks A jugs didefinisikan sebagai dimensi dari ruang kolomnya dan ruang barisnya. Jika sekarang kits memandang A sebagai pemetaan linear, maka kedua definisi ini Baling bersesuaian, karena bayangan dari A tepatnya merupakan ruang kolomnya.

**Contoh 8.9:** Misalkan F: R4 🡪 R3 adalah pemetaan linear yang dapat didefinisikan sebagai

F(x, y, z, t) = (x – y + z + t, Zx – 2y + 3z + 4t, 3x – 3y + 4z + **5t)**

1. Tentukan basis dan dimensi dari bayangan F. Pertama-tams tentukan bayangan dari vektor-vektor basis biasa dari R4,

F (1, 0, 0, 0) = (1, 2, 3) F (0, 0, 1, 0) = (1, 3, 4)

F (1, 1, 0, 0) = (-1, -2, -3) F (0, 0, 0, 1) = (1, 4, 5)

Berdasarkan Proposisi 5.4. vektor-vektor bayangan merentang Im F. Sehingga, bentuklah matriks M yang baris-barisnya adalah vektor-vektor bayangan tersebut dan reduksi barislah menjadi bentuk eselon :

M = ~

Sehingga, (1, 2, 3) dan (0, 1, 1) membentuk sebuah basis dari Im F. Dengan demikian

dim(Im F) = 2 dan rank(,F) = 2

1. Tentukan basis dan dimensi dari kernel pemetaan F.

Tetapkan F(v) = 0, di mana v = (x, y, z, t),

F(x, z, t) = (x – y + z + **t,** 2x – 2y + 3z +4t, 3x – 3y + 4z + 5t)

Tetapkan komponen-komponen yang bersesuaian agar sama antara satu dengan lainnya untuk membentuk sistem homogen berikut ini yang ruang solusinya adalah Ker F‑

x - y + z + t = 0 x - y + z + t = 0 atau x - y + z + t = 0

2x - 2y + 3z + 4t = 0 atau z + 2t = 0 z + 2t = 0

3x - 3y + 4z + 5t = 0 z + 2t = 0

Variabel bebas di sini adalah y dan. t. Sehingga

dim(Ker F) = 2 atau nulitas(F) = 2

1. Tetapkan y = 1, t = 0 untuk memperoleh solusi (-1, 1, 0, 0),
2. Tetapkan y = 0, t = 1 untuk memperoleh solusi (1, 0, -2, 1). Sehingga (-1, 1, 0, 0) dan. (1, 0, -2, 1) membentuk sebuah basis untuk Ker F. Seperti yang telah diduga, dim(Im F) + dim(Ker F) 4 = dim R4.

Misalkan F : V 🡪 U adalah pemetaan linear. Ingat kembali bahwa F(0) = 0. F dikatakan singular jika bayangan dari vektor taknol v adalah 0, yaitu jika terdapat v # 0 sedemikian rupa sehingga F(v) = 0. Sehingga F: V 🡪 U nonsingular jika vektor nol 0 adalah satu-satunya vektor yang bayangannya (disebabkan F) adalah 0, atau dengan kata lain, jika Ker F = (0).

**Teorema 8.7:** Misalkan F: V 🡪 U adalah pemetaan linear nonsingular. Maka bayangan dari sebarang himpunan bebas linear adalah juga bebas linear.

Anggaplah pemetaan linear F: V 🡪 U merupakan pemetaan satu-ke-satu. Maka hanya 0 E U, sehingga F nonsingular. Kebalikannya juga berlaku. Jika F dianggap nonsingular dan. F(v) = F(w), maka F(v - w) F(v) - F(w) = 0, sehingga v - w = 0 atau v = w. Oleh karena itu, F(v) F(w) mengimpli­kasikan v = w, yaitu, F adalah pemetaan satu-ke-satu. Dengan demikian, kita telah membuktikan proposisi berikut ini.

**proposisi 8.8:** Pemetaan linear F: V 🡪 U merupakan pemetaan satu-ke-satu jika dan hanya jika F nonsingular.

Ingat kembali bahwa pemetaan F: V 🡪U disebut isomorfisme jika F linear dan jika F bijektif, yaitu, jika F merupakan pemetaan satu-ke-satu dan pemetaan atas. Ingat kembali pula bahwa ruang vektor V dikatakan isomorfik terhadap ruang vektor U, ditulis V ≡ U, jika terdapat isomorfisme F: V 🡪U.

**Teorema 8.9:** Anggaplah V berdimensi berhingga dan dim V = dim U. Anggaplah pula F: V 🡪 U linear. Maka F merupakan isomorfisme jika dan hanya jika F nonsingular.

Operasi-operasi dengan Pemetaan Linear

Kita dapat menggabungkan pemetaan-pemetaan linear dengan berbagai cara untuk menghasilkan pemetaan linear yang baru. Operasi-operasi ini sangat penting dan akan digunakan pada bagian selanjutnya dari buku ini.

Misalkan F : V U dan G : VU adalah dua pemetaan linear pada medan K. Jumlah F G dan hasilkali skalar kF , di mana k K, didefiniskan dalam bentuk pemetaan dari V ke U berikut ini :

(F + G)( v ) = F( v ) + G( v ) dan ( kF )( v ) = kF( v )

Sekarang kita melihat bahwa jika F dan G linear F + G dan kF linear. Secara spesifik, untuk sebarang vector v, w V dan sebarang skalar a, b K,

(F + G)( v ) = F ( av + bw ) + G ( av + bw )  
 = aF ( v ) + bF ( w ) + aG ( v ) + bG( w )  
 = a[F ( v ) + G( v ) ] + b[F( w ) + G( w ) ]  
 = a( F + G )( v ) + b ( F + G )( w )

Dan

( kF )( av + bw ) = kF ( av + bw ) + bF (w) ]  
 = akF ( v ) + bkF ( w ) = a ( kF ) ( w )

Sehingga F + G dan kF linear.

Teorema 8.10 : Misalkan V dan U adalah ruang vector pada medan K. Maka kumpulan seluruh pemetaan linear dari V ke U dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian skalar di atas membentuk sebuah ruang vector pada K.

Ruang vector yang terdiri dari pemetaan-pemetaan linear pada Teorema 8.10 di atas biasanya dnotasikan dengan Hom ( V , U ).

Teorema 8.11 : Anggaplah dimV = m dan dim U = n. Maka

Dim [ Hom ( V, U ) = mn.

Misalkan V adalah ruang vector pada medan K. sebab ini akan membahas kasus khusus pemetaan linear dari ruang vektor V ke ruang vector itu sendiri, yaitu pemetaan linear berbentuk F : V V. Fungsi ini disebut juga operator atau Transformasi linear pada V. kita akan menuliskan nya dengan A ( V ), dan bukan dengan Hom ( V, V ), untuk ruang yang terdiri dari seluruh pemetaan seperti ini.

Selanjutnya A ( V ) adalah ruang vector pada K, dan jika dim V = n, makan dim A ( V ) = . Di samping itu, untuk sebarang pemetaan F, G A ( V ), kompsisi G F ada dan juga merupakan bagian dari A( V ), sehingga, kita mempunyai “perkalian” yang didefinisikan memnuhi, untuk setiap F, G, H A dan setiap k K.

( i ) F (G + H) = FG + FH

( ii ) (G + H) F = GF + HF

( iii ) k (GF) = ( kG ) F + G ( kF ).

Aljabar tersebut dikatakan bersifat asosiatif jiak ( FG ) H = F ( GH ), di samping syarat-syarat di atas.

Teorema 8.12 : Misalkan V adalah ruang vector pada K. Maka A ( V ) adalah aljabar asosiatif pada K yang mengacu pada komposisi pemetaannya. Jika dim V = n, maka dim A ( V ) = .

PEMETAAN LINEAR DAN MATRIKS LINEAR

Misalkan T adalah operator linear dari ruang vektor V ke ruang vector itu sendiri, dan anggaplah S + {, . . ., } adalah basis dari V . selanjutnya T(), T(), . . ., T() adalah vector-vektor pada V , sehingga masing-masing adalah kombinasi linear dari vector-vektor pada basis S; katakanlah

T() = + + . . . +   
 T() = + + . . . +   
 . . . . .. .. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  
 T() = + + . . . +

Transpos dari matriks koefisien di atas dinotasikan dengan atau [T

Yang disebut representasi matriksn dati T relatife terhadap basis S, atau singkatnya matriks dari T di dalam basis S. ( Subskrip S dapat diabaikan jika S dapat dipahami )

Dengan menggunakan notasi vector koodirnat (kolom), maka representasi matriks dari T dapat di tulis dalam bentuk

MS(T) = [T]s = [[t(U2)]S, …, [t(Un)]S ]

Dalam hal ini, kolom-kolom dari m(T) masing-masing adalah vektor-vektor koordinat dari T(u1) T(u2), …, T(un).

**Contoh 8.10.** Misalkan F: R2 🡪 R2 adalah operator linear yang didefinisikan oleh F(x, y) = (2x + 3y, 4x - 5y). Tentukan representasi matriks dari F relatif terhadap basis S = {u1, u2} = {(1, 2), (2, 5)}.

1. Pertama-tama tentukan F(u1), dan kemudian tulislah sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basis u1, dan u2. (Untuk memudahkan penulisan notasi, kita menggunakan vektor kolom.) Maka akan dihasilkan :

F(u1) = F

Selesaikan sistem tersebut untuk memperoleh x = 52 dan y = -22.

Sehingga, F(u1) = 52u1 – 22u2

1. Selanjutnya tentukan F(u2) , dan kemudian tulislah hasilnya sebagai kombinasi linear dari u1 dan u2:

F(u2) = F

Selesaikan sistem tersebut untuk memperoleh x = 129 dan y = -55.

Sehingga, F(u2) = 129u1 - 55u2.

Sekarang, tulislah koordinat dari F(u1) dan F(u2) sebagai kolom-kolom untuk memperoleh matriks [F]S =

Selanjutnya, ikutilah tahap-tahap algoritma berikut ini untuk menentukan representasi matriks. Tahap 0 merupakan pilihan. Akan lebih berguna untuk menggunakannya dalam Tahap 1(b), yang akan kembali diulang pada tiap vektor basis.

**Algoritma 8.1**: Inputnya adalah operator linear T pada ruang vektor V dan basis S = {u1, u1, …, un} dari V. Outputnya adalah representasi matriks [T]S.

**Tahap 0.** Tentukan rumus untukkoordinat dari sebarang vektor v relatif terhadap basis S.

**Tahap 1.** Ulangi untuk tiap vektor basis uk pada S:

1. Tentukan T(uk).
2. Tulislah T(uk) kombinasi linear dari vektor-vektor basis

u1, u2, …, un

**Tahap 2.** Bentuklah matriks [T]S yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor koordinat pada Tahap 1(b).

**Contoh 8.11. Misalkan** F: R2 🡪 R2 didefinisikan oleh F(x, y) = (2x + 3y, 4x – 5y). Tentukan representasi matriks [F]S dari F relatif terhadap basis S {u1, u2, …, un} = (1, –2), (2, –5)

(Tahap 0) Pertama-tama tentukan koordinat dari (a, b) c= R2 relatif terhadap basis S. Kita memperoleh

Selesaikan x dan y dalam bentuk a dan b, untuk menghasilkan x = 5a + 2b, y = –2a – b. Sehingga, (a, b) = (5a + 2b)u, + (-2a – b)u2

(Tahap 1) Selanjutnya kita menentukan F(u1) dan menuliskannya sebagai kombinasi linear dari ul dan u2 dengan menggunakan rumus di atas untuk (a, b), dan kemudian kita mengulangi kembali proses ini untuk F(u2). Maka akan diperoleh

F(u1) = F(l, –2) = (-4, 14) = 8u1, – 6U2

F(u2) = F(2, –5) = (–11, 33) = 11x1– 11u2

(Tahap 2) Akhirnya, kita menuliskan koordinat dari F(u1) dan F(u2) sebagai kolom-kolom untuk memperoleh matriks yang dikehendaki

[F]S =

**Teorema 8.13:** Misalkan T : V 🡪V adalah operator linear, dan S adalah basis (berhingga) dari V. Maka, untuk sebarang vektor v pada V, [T]S[v]S = [T(v)]S. Pada teorema di atas, diketahui basis S dari ruang vektor V, sehingga kita telah menghubungkan matriks [T] dengan tiap operator linear T di dalam Aljabar A (V) dari operator linear pada V. Teorema 8.13 menjelaskan bahwa “kerja” dari sebuah operator linear tunggal T dipertahankan oleh representasi di atas.Dua teorema berikut menjelaskan bahwa tiga operasi dasar pada A(V) dengan tiga operator ini,yaitu (i) Penjumlahan,(ii) Perkakalian skalar,dan(iii) komposisi,jugadipertahankan.  
Teorema 8.14 :Misalkan V adalah ruang vektor berdimensi n pada K,misalnya pula S adalah basis dari V,dan M adalah aljabar dari matriks n x n pada K.  
Maka permetaan m: A (V) → M yang didefinisikan dengan m (T) =[T]s merupakan isomorfisme ruang vektor.Dalam hal ini,untuk sebarang F, G € K,  
  
 (i) m(F + G) = m(F) + m(G) atau [F + G] = [F] + [G]  
 (ii) m(kF) = km(F) atau [kF] = k[F]  
 (iii) m adalah bijektik (permetaan satu-ke-satu dan pemetaan atas).  
Teorema 8.15 : Untuk sebarang operator linear F, G € A(V),  
 m(G O F) = m(G)m(F) atau [G o F] = [G][F]  
  
Perubahanbasis  
Misalkan V adalah ruang vektor berdimensi n pada medan K. Kita telah melihat bahwa ketika kita telah memilih basis S dari V , maka setiap vektor ѵ € V dapat di repsentasikan oleh tupel-n [ѵ]s pada , pada setiap Operator ѵ € V linear T pada A(V) dapat di representasikan dengan matriks n x n pada K.  
Pertanyaan alami yang muncul adalah :  
Bagaiman repsentasi-repsentasi ini berubah jika kita memilih basis lainnya?  
Untuk menjawab pertanyaan ini, Pertama-tama kita memerlukan definisi berikut.  
Misalkan S = {,,….,} adalah basis dari ruang vektor V, dan S’ = {,,….,} adalah basis lainnya.(sebagai referensi,kita akan menyebut S sebagai basis “lama” dan S’ sebagai basis “baru”.) Karena S adalah sebuah basis,maka tiap vektor pada basis “baru” S’ dapat di tulis secara unik sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor pada S; katakanlah  
= + + … +   
 = + + … +   
………………………………………………  
 = + + …. +   
Misalkan P adalah transpose dari matriks koefisien di atas,yaitu misalkan P= [. Maka P disebut matriks perubahan-basis (atau matriks transisi) dari basis “lama” Smenjadibasis“baru”S’.  
Matriks berubahan-basis P di atas juga dapat di pandang sebagai matriks yang kolom-kolomnya masing-masing merupakan vektor kolom koordinat dari vektor basis “baru” relatif terhadap basis “lama” S, yaitu  
P= [[]s , []s , ….. []s ]  
Secara analog,terdapat matriks perubahan-basis Q dari basis “baru” menjadi basis “lama” S. Dengan cara serupa, Q dapat di pandang sebagai matriks yang kolom-kolomnya masing-masing merupakan vektor kolom koordinat dari vector basis “lama” relatif terhadap basis “baru” S’ , yaitu :  
Q= [[]s’ , [s’ , …. []S’ ]  
Karena vector ,, …, Pada basis baru S’ bebas linear, maka katriks P dapat di balik.Dengan cara serupa, Q juga dapat di balik.Ternyata,kita telah sampai pada proposisiberikutini.  
  
Proposisi 8.16: Misalkan P dan Q adalah matriks perubahan-basis di atas.  
MakaQ=  
Selanjutnya Anggaplah S = { , , …. } Adalah basis dari ruang vector V ,dan Anggaplah pula P =[] adalah sebarang matriks nonsingular. Maka n vector = + + … + , I = 1,2, … , n yang bersesuaian dengan kolom-kolom dari P , akan merupakan matriks perubahan-basis dari S menjadi basis baru S’.  
  
Contoh 9.12. Perhatikan dua basis dari berikut ini :  
S = { , } = { (1,2),(3,5) } dan S’ = { , } = { (1,-1),(1,-2) }  
  
(a) Tentukan matriks perubahan-basis P dari S menjadi basis “baru” S’ .  
Tulislah tiap vektor basis baru dari S’ sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basis asal dan dari S. Kita memperoleh  
[ ] = x [ ] + y[ ] atau Menghasilkan х = -8 , y = 3  
[ ] = x [] + y [] atau Menghasilkan x = -11, y = 4.

Sehingga,

= -8 + 3

Dan oleh karenannya P =

= 11 + 4

Perhatikan bahwa koordinat dari dan adalah kolom-kolom, dan bukannya baris-baris dari matriks perubahan-basis P.

(b) Tentukan matriks perubahan-basis *Q* dari basis “baru” *S’* kembali ke basis “lama” *S.*

Di sini kita menuliskan tiap vector basis “lama” dan dari *S’* sebagai kombinasi linier dari vector basis “baru” dan dari *S.*

Proses ini menghasilkan

= 4

Seperti yang telah diduga dari Proporsisi 8.16, *Q* = . (Pada kenyataannya, kita dapat memperoleh *Q* hanya dengan menentukan .)

**Contoh 8.13.** Perhatikan dua basis dari berikut ini:

*E =* { } = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}

*Dan S =* { , } = {(1, 0, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)}

1. Tentukan matriks perubahan-basis *P* dari basis *E* menjadi basis *S*. Karena *E* adalah basis biasa, kita dapat dengan segera menulis tiap elemen basis dari *S* sebagai kombinasi linier dari elemen-elemen basis *E.* Secara spesifik,

= (1, 0, 1) = +

= (2, 1, 2) = 2 + + 2 dan oleh karenanya *P =*

= (1, 2, 2) = + 2 + 2

Sekali lagi, koordinat dari , , muncul sebagai kolom-kolom pada *P.* Perhatikan bahwa *P* hanyalah matriks yang kolom-kolomnya adalah vector basis dari *S.* Hali ini benar hanya karena basis biasa *E.*

1. Tentukan matriks perubahan-basis *Q* dari basis *S* menjadi basis *E*. Definisi dari matriks perubahan-baris *Q* membuat kita harus menuliskan tiap vector basis (biasa) pada *E* sebagai kombinasi linier dari elemen-elemen basis dari *S.* Hal ini menghasilkan

= (1, 0, 1) = -2 + 2 -

= (0, 1, 0) = -2 + dan olehnya karenanya Q =

= (0, 0, 1) = 3 - 2 +

Perlu ditekankan bahwa untuk menentukan Q, kita perlu menyelesaikan tiga system persamaan linear 3 x 3, satu system 3 x 3 untuk setiap , , .

Dengan kata lain, kita dapat menentukan *Q =*  dengan membentuk matriks *M = [P, I]* dan mereduksi baris *M* menjadi bentuk kenosis baris:

*M =* ~ = *[I, ]*

Sehingga *Q =* =

(Di sini kita telah menggunakan fakta bahwa *Q* adalah invers dari *P.)*

**Proporsi 8.17:** Matriks perubahan-basis ari basis biasa *E* dari menjadi sebarang basis *S* dan adalah matriks *P* yang masing-masing kolomnya adalah vector basis dari *S*.

**Matriks dan Pemetaan Linear Umum**

Akhirnya, mari kita perhatikan kasus umum mengenai pemetaan linear dari dari satu ruang vector lainnya. Anggaplah *V* dan *U* sebagai ruang vector pada medan *K* yang sama, katakanlah dimV = m dan dimU = n, Lebih jauh lagi, anggaplah *S = {, , …, }* dan *S’ = {, , …, }* masing-masing sebagai sebarang basis tetap V dan U.

Anggaplah *F: V → U* merupakan pemetaan linear. Maka vector *F(), F(), …,* *F()* merupakan bagian dari *U,* sehingga masing-masing adalah kobinasi linear dari vektor-vektor basis pada *S’* ; katakanlah,

F() = + + ….+

F()= + + ….+

…………………………………….

F()=+ ….+

Transpons dari matriks koefisien di atas yang dinotasikan dengan (F) atau ,disebut *representasi matriks* dari F relatif terhadap basis S dan S’ .

[Kita akan menggunakan notasi sederhana *m*(F) dan [F] ketka basis-basis tersebut dapat diapahami.]

Teorema berikut ini analog dengan Teorema 8.13 untuk operator linear.  
**Teorema 8.18 :** Untuk sekarang vector *v* € V, = [F

Dalam hal ini, dengan mengalikan kordinat *v* di dalam basis S’ dari V dengan [F], kita akan, memperoleh koordinat F(v) di dalam basis S’ dari U .

Ingat kembali bahwa unutk sebarang ruang vector V dan U , kempulkan seluruh pemetaan linear dari V ke U adalah ruang vector yang dinotasikan dengan Hom(V, U ). Teorema berikut ini analog dengan Teorema 8.14 untuk operator linear, di mana sekarang kita misalkan **M** = menotasikan ruang vector dari seluruh matriks *m x n.*

**Teorema 8.19 :** Pemetaan *m:* Hom (V, U ) →**M** yang didefinisikan oleh m(F) = adalah isomorfisme ruang vector. Dalam hal ini, untuk sebarang F, G € Hom(V, U)dan sebarang scalar *k,*

1. m(F + G) = m(F) + m(G) atau [F +G] =[F] +[G].
2. m(kF) =km(F) atau [kF] =k[F]
3. m adalah bijektif( pemetaan astu ke-satu dan pemetaan atas ).

Teorema berikut ini analog dengan teorema 8.15 untuk operator linear.

**Teorema 8.20** : misalkan S, S’ , S” masing-masing adalah basis-basis dari ruang vector V, U, W.Misalkan pula F : V → U dan G: U → W adalah dua pemetaan linear . Maka

=

Dalam hal ini, relative terhadap basis-basis yg sesuai , representasi matriks dari komposisi dua pemetann adalah hasik kali matriks dari, representasi matriks pada pemetaan-pemeataan tungalnya.

Berikut ini, kita akan melihat bagaimana representasi matriks dari pemetaan linear F: V→ U dapat dipengaruhi ketika basis baru telah dipilih.

**Teorema 8.21** : MIsalkan P adalah matriks perubahan-basis dari basis *e* menjadi basis *e’* pada V, dan Q adlah matriks perubahan-basis dari basis *f* menjadi basis *f’* pada U. Maka , untuk sebarang pemetaan linear F: V→ U,

= P

Dengan kata lain, jika A adlah representasi matriks dari pemetaan linear F relatife terhadap basis *e* dan *f’,* maka B=AP

Teorema terakhir berikut ini akan terunjukan bahwa sekarang pemetaan linear dari suatu ruang fektor V ke ruang vector U lainya dapat di presentasikan oleh matriks yang sangat sederhana.

**Teorema 8.22** : misalkan F:V→U linear dan katakanlah, rank (F) = r. Maka terdapat basis-basis dari V dan U sedemikian rupa sehingga representasi matriks

Dari F mempunyai bentuk A = di mana adalah matriks identitas bujur sangkar –r.

Matiks A di atas disebut *bentuk normal* atau *bentuk kanonis* dari pemetaan linear F.